

Обратные операторы, правый, левый обратные операторы обратимые операторы, признак обратимости

$A: X \rightarrow Y$ - л.н. оп-р

X, Y - нормир; $A: X \rightarrow Y$; A_n^{-1} - **левый обрат.**
 к A , if $A_n^{-1}: Y \rightarrow X$, $A_n^{-1}A = E$

$A_n^{-1}: Y \rightarrow X$ - **правый обрат. оп-р** к A , if $AA_n^{-1} = E$

Оп-р A^{-1} наз-ся **обратным** к A , if $A^{-1}A = E =$
 AA^{-1}

Утв If $\exists A_n^{-1}$ и A_n^{-1} , то $\exists A^{-1} = A_n^{-1} = A_n^{-1}$
 $AA_n^{-1} = E$; $A_n^{-1}(AA_n^{-1}) = A_n^{-1} \Rightarrow A_n^{-1} = A_n^{-1}$ ■

Лемма След. 3 утв-а 1: 1) Ур-ние $Ax = y$ if имеет,
 то только 1 реш.;
 2) $\ker A = \{0\}$;
 3) $\exists A_n^{-1}$.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $Ax = 0$, $x \neq 0$. $Ax = 0 \Rightarrow A(x+x) = 0$

2) $\Rightarrow$ 3) $y \in R(A)$ - область значений A ; тогда $\exists x \in X$,
 $Ax = y$, а x - единственный (из $A \neq 0 \Rightarrow x = A_n^{-1} y$

3) $\Rightarrow$ 1) $Ax = y$, $A\tilde{x} = y$; $A(x-\tilde{x}) = 0$. Пусть бы
 $A_n^{-1} A(x-\tilde{x}) = 0 \Rightarrow x = \tilde{x}$. Ч.Т.Д. ■

Лемма След. 3 утв-а 1: 1) $Ax = y$ имеет реш. $\forall y$;
 2) $R(A) = Y$;
 3) $\exists A_n^{-1}$.

1) $\Rightarrow$ 2) Очевидно!

2) $\Rightarrow$ 3) $\forall y \in Y \exists x \in X$, $Ax = y$. Как хотим, так и
 ставим A_n^{-1} (т.е. он не единственный)

3) $\Rightarrow$ 1) $x = A_n^{-1} y$: $Ax = A \cdot A_n^{-1} y = y$ Ч.Т.Д. ■

Оп-р $A: X \rightarrow Y$ наз-ся **обратимым**, if ур-ние
 $Ax = y$ имеет только 1 реш. $\forall y \in Y$, и реш. uniquely

к элементу y (или просто $\exists A^{-1}$ - о.н.-р.)

∇A - о.н.-р., $A: X \rightarrow Y$; X - банах, Y - лине. нор-
м. пр.; $\exists M > 0: \|Ax\| \geq M\|x\|, \forall x \in X; R(A) = Y$.
Тогда о.н.-р. A обратим.

▲ $\exists M\|x\| \Rightarrow \ker A = \{0\} \Rightarrow \exists A^{-1}; R(A) = Y, \forall y \in Y \Rightarrow$
 $\exists y_n \in R(A), \|y_n - y\| \rightarrow 0 \Rightarrow \exists x_n \in X, Ax_n = y_n$

$$\|y_n - y_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq m\|x_n - x_m\| \Rightarrow \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \exists x, x_n \rightarrow x; Ax_n = y_n$; переходя к пределу,
 $Ax_n = y_n \rightarrow Ax = y \Rightarrow y \in R(A) \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \exists$ о.н.-р.

$$m\|x\| \leq \|Ax\| = \|y\|; m\|A^{-1}y\| \leq \|y\| \forall y \Rightarrow A^{-1} \text{ о.н.-р.}$$

оператор, $(\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m})$ Ч.Т.Д. ■